



# Comportement d'un assemblage de billes non frottantes dans la limite géométrique

Pierre-Emmanuel Peyneau, Jean-Noël Roux

## ► To cite this version:

Pierre-Emmanuel Peyneau, Jean-Noël Roux. Comportement d'un assemblage de billes non frottantes dans la limite géométrique. *Rhéologie*, 2008, 14, pp.18. hal-00531797

**HAL Id: hal-00531797**

**<https://hal.science/hal-00531797>**

Submitted on 3 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comportement d'un assemblage de billes non frottantes dans la limite géométrique

Pierre-Emmanuel Peyneau et Jean-Noël Roux

*Université Paris-Est, UR Navier, 2 allée Kepler, Cité Descartes, 77420 Champs-sur-Marne, France*

**Résumé :** Nous étudions numériquement le comportement d'un matériau granulaire modèle constitué de billes sphériques élastiques identiques non frottantes dans la limite géométrique macroscopique (à savoir la triple limite où les sollicitations extérieures sont très lentes et les grains extrêmement rigides et très nombreux). Nous montrons que les coefficients de frottement macroscopique statique et dynamique coïncident, que l'assemblage ne présente aucune dilatance, que le matériau satisfait un critère de rupture de Lade-Duncan et que ces résultats ne sont pas affectés par la nature du contrôle (en contrainte ou en volume) imposé. La résistance au cisaillement s'explique par l'anisotropie géométrique et mécanique que développe le matériau sous sollicitation.

**Mots-clé :** matériau granulaire, suspension dense, dynamique moléculaire, frottement effectif, dilatance, critère de rupture, élastoplasticité.

[Abridged English version on last page]

## 1. Introduction

De nombreux matériaux amorphes sont constitués de grains assez rigides avec des interactions de très courte portée. C'est notamment le cas de certains verres, des matériaux granulaires secs, des suspensions concentrées non saturées, etc. Même si les interactions microscopiques au sein de ces systèmes peuvent être extrêmement variées (colloïdales, hydrodynamiques, élastiques...), l'encombrement stérique et la géométrie de l'assemblage jouent un rôle plus ou moins prépondérant dans le comportement de ces matériaux.

Un assemblage désordonné de sphères rigides non frottantes et non cohésives, sollicité de manière quasi-statique, constitue l'archétype du matériau dont le comportement est régi par les seuls effets de l'exclusion stérique et de la géométrie. En effet, à l'équilibre, dans la limite des grains parfaitement rigides, ce système présente deux propriétés tout à fait remarquables. D'une part, les configurations d'équilibre minimisent l'énergie potentielle des efforts extérieurs sous contrainte d'impénétrabilité. Lorsque le chargement est isotrope, l'énergie potentielle est proportionnelle à la déformation volumique, l'assemblage réalise un maximum local de densité dans l'espace des configurations et s'identifie à un état RCP (*random close packing*) de compacité proche de 64% [1, 2, 3]. Cet état d'équilibre est le seul possible pour un système constitué de particules non frottantes. D'autre part, le réseau des contacts est isostatique, ce qui signifie que, à forces extérieures imposées, la seule donnée de la position des grains suffit à déterminer de

manière univoque l'intensité de la force au niveau de chaque contact entre particules [1, 2, 4].

Pour épuré que soit ce modèle, il est probablement apte à saisir certaines propriétés des suspensions très denses de particules athermiques et non colloïdales sous sollicitation quasi-statique. En effet, la présence d'une fine couche lubrifiante de fluide visqueux entre grains proches voisins pénalise considérablement le mouvement relatif normal de deux particules par rapport au mouvement relatif tangentiel puisque dans l'approximation de lubrification, la composante normale de la force au niveau du quasi-contact est beaucoup plus grande que la composante tangentielle [5]. D'autre part, on sait que certaines suspensions concentrées modèles présentent un réseau de forces très semblable à celui des matériaux granulaires [6].

Le matériau modèle, la méthode numérique employée et les paramètres sans dimension gouvernant le système sont présentés dans la partie 2. Le matériau, qui ne présente aucune échelle de contrainte, se comporte comme un fluide lorsque le rapport entre la contrainte de cisaillement et la contrainte moyenne dépasse une certaine valeur. L'assemblage se déforme alors continûment et de manière stationnaire (état qualifié de critique en mécanique des sols). L'étude de ce régime fait l'objet de la partie 3. En revanche, lorsque le cisaillement appliqué est inférieur au seuil de mise en écoulement, le système se comporte comme un solide. Le comportement macroscopique du matériau et sa microstructure dans ce régime sont traités dans la partie 4. La partie 5 fait office de conclusion.

## 2. Matériau et simulations numériques

Nous considérons un système constitué de grains sphériques identiques, de diamètre  $a$  et de masse  $m$ . Les billes sont faites d'un matériau élastique dont le module d'Young est noté  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Lorsque deux billes sont en contact, la force qu'exerce l'une sur l'autre est supposée être la somme de deux termes purement normaux (rappelons que nous ne souhaitons pas tenir compte du frottement solide entre grains). Le premier terme est la force élastique répulsive de Hertz

$$F_N^e = \frac{E}{3(1-\nu^2)} \sqrt{ah^3}, \quad (1)$$

où  $h$  est la déflexion élastique, tandis que la seconde composante

$$F_N^v = \zeta (mE/(1-\nu^2))^{1/2} (ah)^{1/4} \dot{h}, \quad (2)$$

où  $\zeta$  est le coefficient d'amortissement visqueux, vise à prendre en compte aussi simplement que possible, mais pas nécessairement de manière réaliste, la dissipation au sein du matériau – cette forme de dissipation présente en outre l'avantage de conduire à un coefficient de restitution indépendant de la vitesse lors d'un choc binaire, et ce malgré la non linéarité de l'équation différentielle régissant la dynamique du choc.

Numériquement, le système est enfermé dans un parallélépipède rectangle, dont certaines dimensions peuvent varier pour maintenir une contrainte imposée constante [7]. Afin d'étudier le comportement du cœur du matériau et de pouvoir déterminer ses lois constitutives, on utilise des conditions aux limites périodiques ou de Lees-Edwards lorsque l'on souhaite simuler du cisaillement [7] (la procédure de Lees-Edwards consiste à assigner une vitesse aux répliques périodiques de la boîte de simulation de manière à imposer une valeur cible du taux de cisaillement). Le système est simulé par dynamique moléculaire, à l'aide d'un solveur de type prédicteur-correcteur [7]. Plusieurs types de sollicitations et de conditions aux limites peuvent être imposés : dans chaque procédure, on contrôle une ou plusieurs composantes du tenseur des contraintes, une déformation et/ou un taux de cisaillement [8, 9]. L'essai numérique porte systématiquement sur un matériau qui se trouve initialement dans un état RCP isotrope.

Une fois exprimé sous forme adimensionnelle, le comportement du matériau dépend essentiellement de quatre nombres sans dimension : le coefficient d'amortissement visqueux  $\zeta$  (dont la valeur n'a aucun impact sur les résultats obtenus dans la limite quasi-statique ; ainsi, notre ignorance de la forme précise des forces dissipatives ne portera pas à conséquence à proximité de cette limite) ; le nombre inertiel

$I = \dot{\gamma}(m/(aP))^{1/2}$ , qui permet de définir quantitativement la limite quasi-statique comme la limite  $I \rightarrow 0$ , égal au rapport de deux temps caractéristiques (temps caractéristique des effets inertiels  $(m/aP)^{1/2}$  sur temps caractéristique des sollicitations imposées  $\dot{\gamma}^{-1}$ ) ; le paramètre de raideur  $\kappa = [E/((1-\nu^2)P)]^{2/3}$ , défini de sorte à ce que la déflexion  $h$  des contacts soit typiquement d'ordre  $\kappa^{-1}a$  ; le nombre de particules  $N$  (on ne peut exclure *a priori* l'occurrence d'effets de taille finie). La situation qui nous intéresse est la triple limite  $I \rightarrow 0$  (limite quasi-statique),  $\kappa \rightarrow +\infty$  (limite rigide) et  $N \rightarrow +\infty$  (limite thermodynamique ou macroscopique), où le comportement du système est dicté par la géométrie. Dans ce qui suit, cette triple limite est appelée limite géométrique macroscopique. Approcher cette limite est une tâche difficile du point de vue numérique puisque le coût de calcul de la méthode de dynamique moléculaire utilisée est proportionnel à  $\gamma N \kappa^{1/2} I^{-1}$  pour simuler une déformation  $\gamma$  du système.

## 3. Régime liquide sous cisaillement simple

En effectuant des simulations à taux de cisaillement  $\dot{\gamma} = \partial v_1 / \partial x_2$  contrôlé, on constate qu'au-delà d'une certaine valeur de la déformation (de l'ordre de quelques dizaines de pourcent), le système atteint un état stationnaire, dans lequel on n'observe aucune localisation persistante du cisaillement. En conséquence, les lois constitutives auxquelles obéit le matériau peuvent être déduites en moyennant dans le temps les quantités d'intérêt mesurées à l'instant  $t$  sur le système dans son ensemble. Pour ce faire, nous avons utilisé la méthode exposée dans la référence [10], qui présente l'avantage de donner accès à la valeur moyenne  $\bar{q}$  d'une quantité  $q$  et à l'incertitude  $\Delta \bar{q}$  de cette valeur moyenne à partir d'une série temporelle  $q(t)$ .

De tous les paramètres sans dimension régissant le système,  $I$  est celui dont l'influence est la plus marquée. Les figures 1 et 2 montrent l'évolution du frottement effectif  $\mu^* = \langle |\sigma_{12}/\sigma_{22}| \rangle$  et de la compacité moyenne  $\Phi$  en fonction de  $I$ . Les résultats obtenus sont indépendants de la configuration initiale et les barres d'erreur plus petites que les symboles.

Comme observé dans des études antérieures portant sur les régimes quasi-statique et dense [11, 12, 13], le frottement effectif est une fonction croissante de  $I$ . Numériquement, on constate que  $\kappa$  (pour  $\kappa > 8.4 \times 10^3$ ) et  $N$  (pour  $N > 1000$ ) n'ont que très peu d'influence sur  $\mu^*$ . On aboutit à la même conclusion en étudiant,

pour des valeurs de  $I$  suffisamment faibles (typiquement,  $I < 0.01$ ), l'effet de  $\zeta$  sur  $\mu^*$ . La valeur du frottement effectif dans la limite géométrique macroscopique est donc donnée par l'extrapolation en  $I \rightarrow 0$  de la courbe tracée sur la figure 1. Une interpolation de la forme  $\mu_0^* + cI^\alpha$  fournit  $\mu_0^* = 0.101 \pm 0.004$ , ce qui correspond à un angle de frottement

$$\varphi_0^* = \tan^{-1} \mu_0^* = 5.76^\circ \pm 0.22^\circ. \quad (3)$$

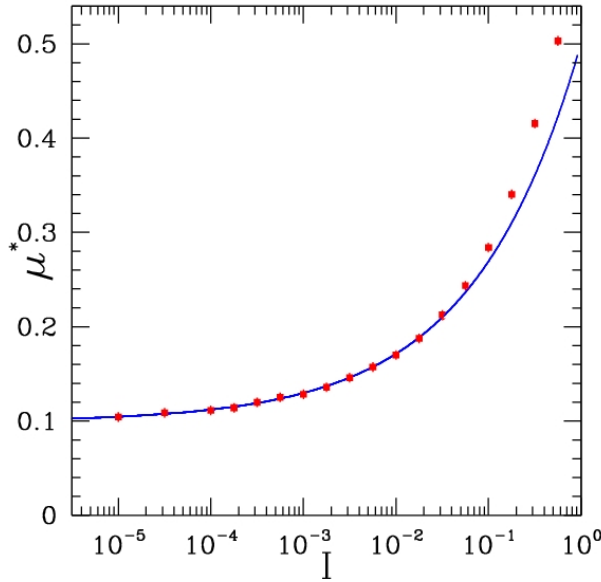


Figure 1. Coefficient de frottement effectif  $\mu^*$  en fonction de  $I$ . Les points obtenus sont interpolés par  $\mu_0^* + cI^\alpha$  avec  $\mu_0^* = 0.101 \pm 0.004$  et  $\alpha = 0.38 \pm 0.04$ .

Ainsi, un matériau constitué de billes non frottantes présente tout de même un frottement effectif non nul. L'existence d'un frottement effectif dans la limite géométrique macroscopique est due au caractère dissipatif du matériau, mais la valeur de l'angle de frottement est uniquement dictée par la géométrie et est liée à l'encombrement stérique des grains.

En ce qui concerne l'influence de  $I$  sur la compacité moyenne  $\Phi$  mesurée en régime stationnaire, la figure 2 montre que plus le système est loin de la limite quasi-statique, plus il se décompacte.

Numériquement, on observe que  $\Phi$  ne dépend quasiment pas de  $\zeta$  à proximité de la limite quasi-statique ( $I < 0.01$ ). En revanche,  $\Phi$  dépend un peu de  $\kappa$  et est une fonction légèrement croissante de  $N$ , tout en s'approchant d'une limite finie pour  $\kappa \rightarrow +\infty$  et  $N \rightarrow +\infty$ . Dans la double limite quasi-statique et macroscopique, une interpolation de la forme  $\Phi^{-1} = \Phi_0^{-1} + eI^\nu$  conduit à  $\Phi_0 = 0.6410 \pm 0.0005$  pour  $\kappa = 3.9 \times 10^4$ . Or, à l'équilibre, dans la limite

macroscopique, on a  $\Phi_0^{stat} = 0.6403 \pm 0.0004$  pour  $\kappa = 3.9 \times 10^4$ , ce qui signifie que dans la double limite où  $I \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow +\infty$ , et très probablement aussi dans la limite géométrique macroscopique, la valeur moyenne de la compacité du système cisailé est la même que celle du système dans son état initial. Dit autrement, un assemblage comptant un grand nombre de billes rigides non frottantes est non dilatant lorsqu'il est très lentement cisailé. Ce résultat contredit l'image que l'on invoque fréquemment pour expliquer le caractère inéluctable de la dilatance : on imagine un matériau granulaire dont les grains sont arrangés selon des plans parallèles ; lorsque ce matériau est cisailé, le plan supérieur se déplace et, pour des raisons stériques, passe au-dessus des grains situés en dessous, provoquant ainsi la dilatation du système. On peut toutefois objecter qu'il est assez malaisé de se représenter ce qui se produit lorsque les grains sont disposés de manière complètement désordonnée, et que la représentation précédente fait la part belle à la phase durant laquelle un plan passe par-dessus le reste des grains constituant le système et néglige celle où les grains redescendent sous l'effet du confinement. Un modèle simple rendant compte de l'absence de dilatance est proposé dans la référence [8].

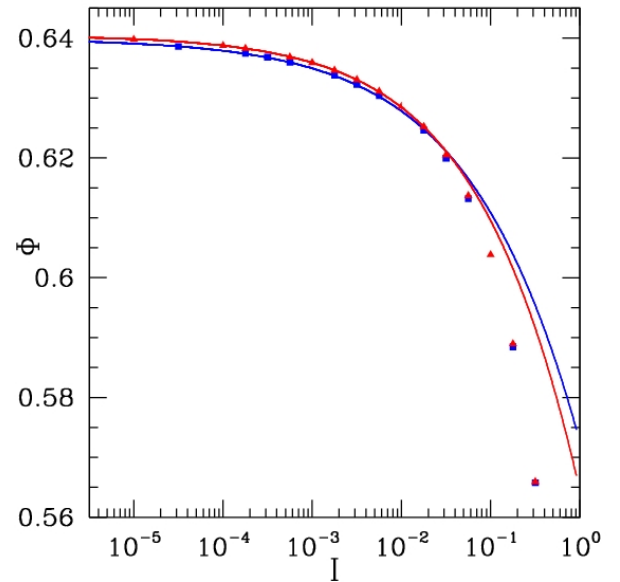


Figure 2. Valeur moyenne de la compacité  $\Phi$  en fonction de  $I$  pour  $\kappa = 3.9 \times 10^4$  (carré bleus) et  $\kappa = 8.4 \times 10^3$  (triangles rouges).

Les résultats obtenus sont indépendants du type de contrôle exercé sur le système. La figure 3 montre que des simulations à volume fixé conduisent aux mêmes valeurs moyennes que les simulations à contrainte normale  $\sigma_{22}$  contrôlée, pourvu que l'on choisisse comme compacité la compacité moyenne mesurée avec l'essai à contrainte contrôlée correspondant (les séries temporelles issues des simulations à volume fixé sont toutefois plus bruitées et donc moins faciles à exploiter).

Nos simulations montrent que les fluctuations de toutes les quantités mesurées régressent comme  $N^{-1/2}$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ . Les deux types de contrôle devraient donc conduire exactement aux mêmes résultats dans la limite macroscopique.

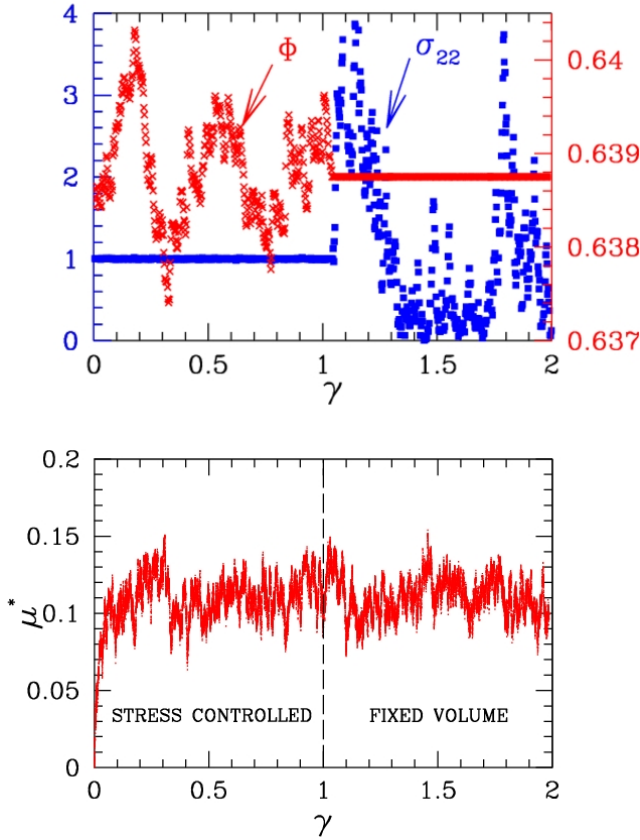


Figure 3. En bas : coefficient de frottement effectif  $\mu^*$  en fonction de la déformation  $\gamma$ . En haut : pour  $\gamma < 1$ ,  $\sigma_{22}$  est contrôlé,  $\Phi$  fluctue et on mesure  $\langle \Phi \rangle = \Phi_1$  (axe de droite), tandis que pour  $\gamma > 1$ ,  $\Phi = \Phi_1$  est imposé et  $\sigma_{22}$  fluctue (axe de gauche).

## 4. Régime solide

### 4.1 Rupture

Une méthode de simulation statique permettant d'étudier l'effet de trois chargements  $\underline{\Sigma}$  différents, tous à pression constante, a été mise en œuvre numériquement pour pouvoir déterminer la forme du critère de rupture du matériau et, plus généralement, étudier le comportement du matériau en régime solide, tant que la contrainte de cisaillement est inférieure au seuil de contrainte (proportionnel à la contrainte moyenne) provoquant une mise en écoulement. Les trois types de chargement simulés sont un test de cisaillement dans le plan 1-2 ( $\underline{\Sigma} = P\underline{1} + \tau(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1)$ ), un test de compression triaxiale et un test d'extension triaxiale selon l'axe 3

( $\underline{\Sigma} = \Sigma_1(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) + \Sigma_3\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$  avec  $\Sigma_3 > \Sigma_1$  en compression et  $\Sigma_3 < \Sigma_1$  en extension).

Le matériau est d'abord assemblé dans un état initial de type RCP. Un petit déviateur de contrainte est ensuite appliqué. Si le système parvient à atteindre l'équilibre, on augmente l'intensité du déviateur, étape par étape. La dernière valeur du déviateur de contrainte pour laquelle le système est parvenu à rejoindre un état d'équilibre constitue une estimation du seuil de rupture. La même procédure est appliquée sur plusieurs configurations initiales distinctes afin d'obtenir des résultats représentatifs.

Dans l'espace des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , la surface de rupture a la forme d'un cône lorsque  $\kappa$  est grand (il n'y a pas d'échelle de contrainte dans la limite rigide), d'axe la trisectrice, qui est la droite d'équations  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Il nous suffit donc de connaître la forme de la courbe de rupture dans un plan déviatorique (c'est-à-dire un plan orthogonal à la trisectrice) pour pouvoir reconstruire la totalité de la surface de rupture. Les résultats obtenus par simulation numérique (coordonnées de la courbe de rupture) sont reportés sur la figure 4. Le critère de Mohr-Coulomb non cohésif, souvent invoqué dans le domaine des matériaux granulaires, se révèle inapte à rendre compte de la façon dont le matériau rompt : aucune angle de frottement putatif n'est à même de concilier les résultats issus des différents essais. En revanche, les résultats peuvent être interpolés de manière satisfaisante par un critère à un paramètre, le critère de Lade-Duncan,

$$f_{LD}(\underline{\sigma}) = (Tr \underline{\sigma})^3 / Det \underline{\sigma} - k \leq 0, \quad (4)$$

la valeur de  $k$  dépendant de  $N$ .

Numériquement, on constate que le domaine entouré par la courbe de rupture est fonction de la taille du système et décroît lorsque  $N$  croît (voir figure 5). Nous avons déterminé l'allure de la courbe de rupture dans la limite macroscopique en supposant que la valeur des contraintes principales de rupture mesurées sur des échantillons de taille finie varie linéairement en fonction de  $N^{-1/2}$ , ce qui rend bien compte des observations, et nous avons également évalué les incertitudes associées. Dans la limite géométrique macroscopique, on trouve :

$$k \rightarrow k_\infty = 27.22 \pm 0.02, \quad (5)$$

ce qui correspond à un angle de frottement effectif de  $4.4^\circ \pm 0.2^\circ$  pour un essai de compression triaxiale, de  $4.5^\circ \pm 0.3^\circ$  pour un essai d'extension triaxiale et de  $5.2^\circ \pm 0.3^\circ$  pour un essai de cisaillement. Cette dernière valeur est compatible avec celle trouvée en régime liquide à l'aide des simulations à taux de cisaillement contrôlé.

Une telle concordance a déjà été observée à deux dimensions [15].

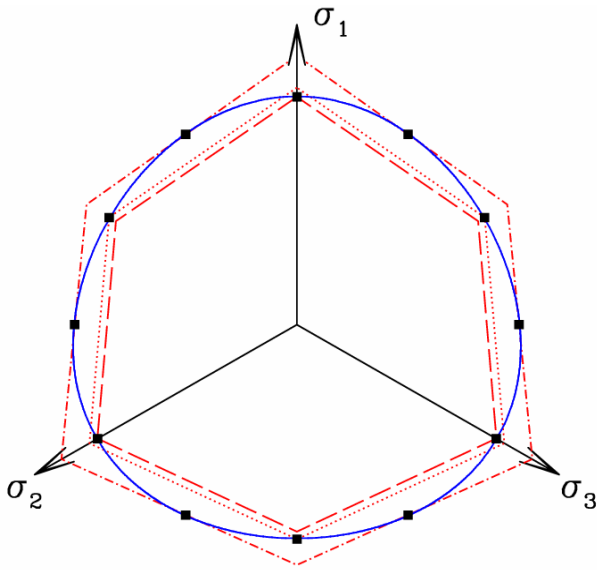


Figure 4. Points de rupture calculés numériquement tracés dans le plan déviatorique pour  $N = 1372$  (les barres d'erreur sont plus petites que les symboles). Comparaison entre les critères de Lade-Duncan (en trait continu bleu) et de Mohr-Coulomb (en traits pontillés rouges).

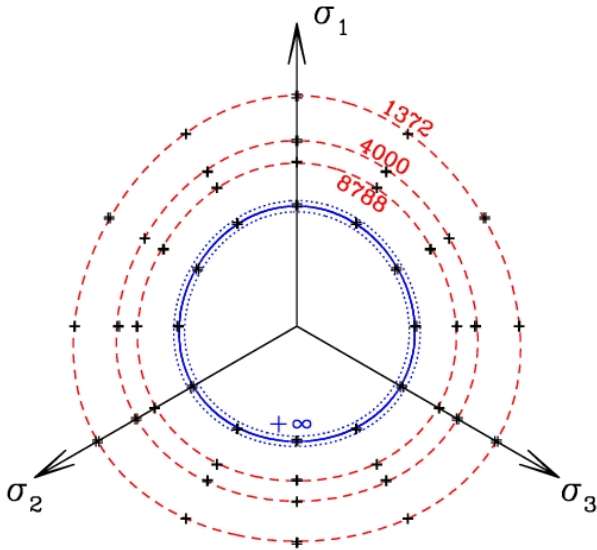


Figure 5. Points calculés et interpolations de Lade-Duncan pour trois tailles différentes (en rouge) et extrapolation des résultats dans la limite macroscopique (en bleu).

La figure 5 montre que la courbe de rupture obtenue dans la limite macroscopique est assez proche d'un cercle. Or, de nombreux critères ont des courbes de rupture quasi-circulaires dans une certaine gamme de variation de leur(s) paramètre(s). On peut dès lors se poser la question de la pertinence du modèle de Lade-Duncan. Il s'avère que le critère de Drucker-Prager, dont la courbe de rupture est parfaitement circulaire est inapte à interpoler les points obtenus numériquement (rappelons que nous avons estimé les barres d'erreur pour chaque point). En revanche, le critère de Matsuoka-Nakai permet d'interpoler correctement les résultats trouvés dans la

limite macroscopique ; néanmoins, contrairement au modèle de Lade-Duncan, ce critère n'est pas en mesure de précisément rendre compte des seuils de rupture mesurés sur les échantillons de petite taille [9].

## 4.2 Aspects microscopiques

L'étude de la limite géométrique macroscopique menée jusqu'à présent appelle naturellement une analyse microstructurale des assemblages obtenus par application d'une sollicitation anisotrope. Nous nous restreignons ici à l'examen de certaines grandeurs élémentaires, scalaires (connectivité, distribution de l'intensité des forces...) ou tensorielles (texture géométrique...), en laissant de côté les aspects non locaux, comme les mécanismes de la déformation, les corrélations de vitesse, etc., dont l'analyse, pour intéressante qu'elle soit, est considérablement plus complexe.

### 4.2.1 Quantités scalaires

Dans la limite géométrique macroscopique, quel que soit le chargement imposé (cisaillement dynamique ou statique, essai triaxial de compression ou d'extension), la connectivité du réseau des contacts, c'est-à-dire la proportion de grains ayant  $n$  voisins pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ , est la même que pour un assemblage équilibré sous un chargement isotrope [3]. En particulier, les simulations statiques montrent que dans le régime solide, quelle que soit la valeur du déviateur imposé, la coordinence vaut  $6.08 \pm 0.03$  lorsque  $\kappa = 3.9 \times 10^4$  (en ignorant la contribution des grains flottants qui représentent environ 1.3% du total). L'assemblage granulaire reste donc proche de l'isostaticité même lorsque le chargement est anisotrope (le léger défaut d'isostaticité est imputable à la rigidité finie des billes).

D'autre part, la distribution de probabilité de l'intensité des forces  $p(f)$ , avec  $f = F/\langle F \rangle$ , a la même allure que celle donnée dans la littérature dans le cas de billes rigides non frottantes équilibrées de manière isotrope.  $p(f)$  commence par croître jusqu'à ce que  $f$  soit environ égal à 0.5, puis décroît, de manière exponentielle lorsque  $f$  est suffisamment grand. En procédant à des tests de vraisemblance de Kolmogorov-Smirnov [16], nous avons pu montrer que la distribution des forces sous chargement anisotrope est statistiquement semblable à celle obtenue sous chargement isotrope [2, 17].

En conclusion, aucune des quantités scalaires étudiées n'est sensible à l'anisotropie du chargement appliqué, ce qui, comme nous allons le voir, n'est pas le cas pour les quantités sensibles à l'orientation des contacts.

### 4.2.2 Anisotropie

Des travaux menés ces dernières années ont montré que pour les matériaux granulaires, la résistance à



l'application d'une contrainte déviatorique est due à l'anisotropie des contacts et des forces induites par le chargement [18, 19]. Mathématiquement, cette anisotropie est caractérisée par la densité de probabilité  $P(\vec{n}, F)$  de trouver un contact orienté selon le vecteur unitaire  $\vec{n}$  portant une force d'intensité  $F$ . Lorsque  $\kappa \gg 1$ , le tenseur des contraintes peut s'exprimer en fonction de cette densité [9]:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{N_c a}{V} \int d\Omega dF P(\vec{n}, F) F \vec{n} \otimes \vec{n} \quad (6)$$

( $N_c$  est le nombre de contacts et  $V$  le volume du système.) En intégrant sur l'intensité de la force, il vient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{N_c a}{V} \int d\Omega E(\vec{n}) \langle F \rangle_{\vec{n}} \vec{n} \otimes \vec{n} \quad (7)$$

$E(\vec{n})$  est la densité de probabilité de trouver un contact orienté selon  $\vec{n}$  et caractérise l'anisotropie géométrique, tandis que  $\langle F \rangle_{\vec{n}}$  est la densité angulaire de force et caractérise l'anisotropie mécanique.

Ces deux fonctions, définies sur la sphère unité, peuvent être développées sur la base des harmoniques sphériques. Les contacts n'étant pas orientés, tous les coefficients d'ordre impair sont nuls. L'ordre 2 est donc l'ordre le plus bas du développement qui est sensible à l'anisotropie ; à cet ordre, les coefficients du développement de  $E(\vec{n})$  sont liés aux éléments du tenseur de texture géométrique  $\underline{\underline{F}} = \langle \vec{n} \otimes \vec{n} \rangle$ .

Numériquement, dans le cas des essais de cisaillement (statique ou dynamique), on constate qu'en bonne approximation :

$$E(\vec{n}) = \frac{1}{4\pi} + F_{12} d_{xy}(\theta, \varphi) \quad (8)$$

$$\langle F \rangle_{\vec{n}} = \left( \frac{1}{4\pi} + H_{12} d_{xy}(\theta, \varphi) \right) \langle F \rangle \quad (9)$$

avec  $d_{xy}(\theta, \varphi) = 15 \sin^2 \theta \sin(2\varphi) / (8\pi)$ , où  $\theta$  est la colatitude ( $\theta = 0$  étant l'axe de la coordonnée  $x_3$ ) et  $\varphi$  la longitude des coordonnées sphériques. Dans le cas des tests triaxiaux, l'existence d'une symétrie axiale assure que :

$$E(\vec{n}) = \frac{1}{4\pi} + \left( F_{33} - \frac{1}{3} \right) d_{z^2}(\theta, \varphi) \quad (10)$$

$$\langle F \rangle_{\vec{n}} = \left( \frac{1}{4\pi} + H_{33} d_{z^2}(\theta, \varphi) \right) \quad (11)$$

avec  $d_{z^2}(\theta, \varphi) = 15(3 \cos^2 \theta - 1) / (16\pi)$ .

La figure 6 (respectivement 7) montre l'évolution du terme d'anisotropie géométrique (respectivement mécanique) avec le rapport  $(\sigma_{33} - \sigma_{11}) / (\sigma_{33} + \sigma_{11})$ . On constate que la valeur absolue du terme anisotrope augmente systématiquement avec l'intensité du déviateur de contrainte appliqué, de manière à peu près linéaire (on peut toutefois noter que la pente des courbes semble changer au voisinage des limites du régime solide).

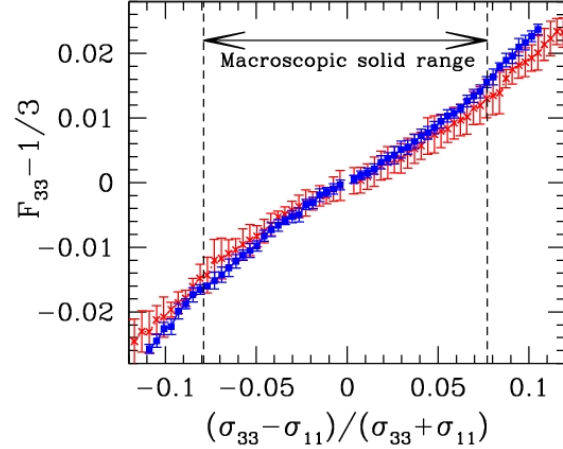


Figure 6. Évolution du terme d'anisotropie géométrique avec  $r = (\sigma_{33} - \sigma_{11}) / (\sigma_{33} + \sigma_{11})$  lorsque le matériau est soumis à des tests triaxiaux d'extension ( $r < 0$ ) ou de compression ( $r > 0$ ), pour  $N = 1372$  (croix rouges) et  $N = 8788$  (carrés bleus). L'intervalle solide macroscopique correspond au domaine de comportement solide lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

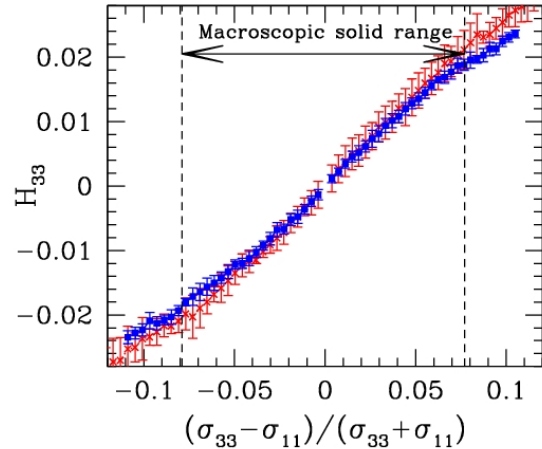


Figure 7. Évolution du terme d'anisotropie mécanique avec  $r = (\sigma_{33} - \sigma_{11}) / (\sigma_{33} + \sigma_{11})$  lorsque le matériau est soumis à des tests triaxiaux d'extension ( $r < 0$ ) ou de compression ( $r > 0$ ), pour  $N = 1372$  (croix rouges) et  $N = 8788$  (carrés bleus). L'intervalle solide macroscopique correspond au domaine de comportement solide lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

D'autre part, l'équation (7), qui fait le lien entre une quantité macroscopique (le tenseur des contraintes) et des propriétés microscopiques de l'assemblage, reste bien vérifiée numériquement lorsque l'on utilise les

approximations fournies par les équations (8, 9) ou (10, 11).

## 5. Conclusion

Dans la limite géométrique macroscopique, un assemblage de billes non frottantes identiques ne présente pas de dilatance. Les propriétés de rupture de ce matériau sont bien décrites par un critère de Lade-Duncan dont le paramètre dépend de la taille du système. Dans la limite macroscopique, le système est capable de supporter un déviateur de contrainte non nul vérifiant

$$(Tr \underline{\underline{\sigma}})^3 / Det \underline{\underline{\sigma}} \leq k_{\infty} = 27.22 \pm 0.02. \quad (12)$$

$k_{\infty}$  est une propriété géométrique intrinsèque des systèmes granulaires non frottants.

Toutes les quantités scalaires caractérisant la géométrie de l'assemblage sont insensibles à l'anisotropie du chargement. Quant aux anisotropies géométrique et mécanique, elles peuvent être décrites à l'aide d'un unique terme, dont la définition dépend du type de chargement appliqué.

La rhéologie du matériau n'est pas affectée par la nature du contrôle exercé sur le système. Les simulations effectuées à contrainte contrôlée ou à volume fixé conduisent aux mêmes moyennes temporelles. Les fluctuations diffèrent mais les simulations à contrainte contrôlée suggèrent que leur amplitude tend vers zéro dans la limite macroscopique. Ceci laisse à penser que dans la limite macroscopique, l'état du système est gouverné par le seul tenseur des contraintes et ne dépend pas de l'histoire du chargement. Cette conjecture est étayée par le fait que le réseau des contacts du système reste isostatique lorsque le chargement est anisotrope ; de plus, des courbes comme celles présentées figures 6 et 7 suggèrent l'existence d'une correspondance biunivoque entre état de contrainte et variables d'états internes dans la limite  $N \rightarrow +\infty$  : en effet, les barres d'erreur sont plus petites pour des systèmes comptant 8788 grains que pour des systèmes comptant 1372 grains. Nous pensons donc que, de même que l'état RCP est statistiquement défini de manière unique, il existe des états RCP anisotropes dont la géométrie est uniquement fonction du tenseur des contraintes appliqué.

Nos résultats semblent également indiquer qu'il existe une relation bien définie entre contrainte et déformation dans la limite macroscopique (à ceci près que les systèmes simulés semblent trop petits pour que l'on puisse observer de manière très nette la régression des fluctuations). Ce comportement diffère de celui observé sur des systèmes bidimensionnels de disques parfaitement rigides (dans ce cas, la déformation qui résulte d'un incrément de contrainte suit une distribution de Lévy) [20].

Lorsque la contrainte appliquée est en dehors de la zone de l'espace des contraintes principales délimitée par la surface de rupture, le matériau se met à s'écouler avec une fraction solide très proche de 0.64. Comme expliqué dans l'introduction, le matériau peut être considéré comme une suspension idéalement lubrifiée et ce résultat suggère donc que la fraction solide  $\Phi^*$  à laquelle la viscosité d'une suspension diverge est égale à la compacité d'un état RCP. Notre estimation de  $\Phi^*$  est en accord avec la référence [21]. Néanmoins, des expériences récentes plaident plutôt pour  $\Phi^* = 0.605 \pm 0.003$  [22]. Ce désaccord est très certainement dû au fait que le comportement de la suspension dense étudiée dans la référence [22] ne dépend pas uniquement de la géométrie, mais aussi des caractéristiques des billes utilisées (rugosité, interactions physico-chimiques, etc.) dont on sait qu'elles affectent le comportement des suspensions.

Dans un futur proche, nous souhaitons simuler de manière plus réaliste le comportement d'une pâte, en nous inspirant d'une méthode proposée par Ball et Melrose [23, 24, 25].

- [1] O'Hern, C.S., Silbert, L.E., Liu, A.J., Nagel, S.R. *Phys. Rev. E*, 68, 011306 (2003).
- [2] Donev, A., Torquato, S., Stillinger, F.H. *Phys. Rev. E*, 71, 011105 (2005).
- [3] Agnolin, I., Roux, J.-N. *Phys. Rev. E*, 76, 061302 (2007).
- [4] Roux, J.-N. *Phys. Rev. E*, 61, 6802 (2000).
- [5] Kim, S., Karrila, S.J. *Microhydrodynamics: principles and selected applications* (Butterworth-Heinemann, 1991).
- [6] Ouaguenouni, S., Roux, J.-N. *Europhys. Lett.*, 39, 117 (1997).
- [7] Allen, M., Tildesley, D. *Computer simulations of liquids* (Oxford University Press, Oxford, 1987).
- [8] Peyneau, P.-E., Roux, J.-N. *Phys. Rev. E*, 78, 011307 (2008).
- [9] Peyneau, P.-E., Roux, J.-N. Solidlike behavior and anisotropy in rigid frictionless bead assemblies, *accepted for publication in Phys. Rev. E* (2008).
- [10] Flyvbjerg, H., Petersen, H. *J. Chem. Phys.*, 91, 461 (1989).
- [11] Da Cruz, F., Emam, S., Prochnow, M., Roux, J.-N., Chevoir, F. *Phys. Rev. E*, 72, 021309 (2005).
- [12] Hatano, T. *Phys. Rev. E*, 75, 060301(R) (2007).
- [13] GDR MiDi *Eur. Phys. J. E*, 14, 341 (2004).
- [14] Lade, P., Duncan, J. *J. Geotech. Eng. Div.*, 101, 1037 (1975).
- [15] Xu, N., O'Hern, C.S. *Phys. Rev. E*, 73, 061303 (2006).
- [16] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, 1988).



- [17] Radjaï, F., Jean, M., Moreau, J.-J., Roux, S. *Phys. Rev. Lett.*, 77, 274 (1996).
- [18] Azéma, E., Radjaï, F., Peyroux, R., Saussine, G. *Phys. Rev. E*, 76, 011301 (2007).
- [19] Radjaï, F. ArXiv e-prints (2008), 0801.4722.
- [20] Combe G., Roux, J.-N. *Phys. Rev. Lett.*, 85, 3628 (2000).
- [21] Sierou, A., Brady, J. *J. Fluid Mech.*, 448, 115 (2001).
- [22] Ovarlez, G., Bertrand, F., Rodts, S. *J. Rheol.*, 50, 259 (2006).
- [23] Melrose, J.R., Ball, R.C. *Europhys. Lett.*, 32, 535 (1995).
- [24] Melrose, J.R., Ball, R.C. *J. Rheol.*, 48, 961 (2004).
- [25] Ball, R.C., Melrose, J.R. *Physica A*, 247, 444 (1997).

### [Abridged English version]

We investigate the behaviour of a model granular material made of frictionless, nearly rigid equal-sized beads, in the quasistatic limit, by numerical simulation. In the macroscopic geometric limit (that is the macroscopic, rigid and quasistatic limits), with either volume or normal stress controlled simulations, static and dynamic macroscopic friction coefficients coincide, dilatancy vanishes and the material satisfies a Lade-Duncan failure criterion. The macroscopic shear strength stems from both contact network and force anisotropies.